Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Sommersemester 2006

Blatt 5

Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung: Lösungsvorschlag

G10.

zu a): Setze $G(x,u,y,\mu) := F_\mu(x,u,y)$. Dann gilt

$$G(x(\mu),u(\mu),y(\mu),\mu) = 0.$$

Nach Vorlesung ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar und liefert die Differenzierbarkeit von $\mu \mapsto (x(\mu),u(\mu),y(\mu))$, wobei

$$G'_{(x,u,y)}(x(\mu),u(\mu),y(\mu)) \begin{pmatrix} x'(\mu) \\ u'(\mu) \\ y'(\mu) \end{pmatrix} + G'_\mu(x(\mu),u(\mu),y(\mu)) = 0.$$

Berechnen der Ableitungen liefert

$$\begin{pmatrix} 0 & -A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ Y(\mu) & 0 & X(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(\mu) \\ u'(\mu) \\ y'(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}.$$

zu b): Multiplikation der letzten Zeile mit $X(\mu)^{-1/2}Y(\mu)^{-1/2}$ liefert

$$D^{-1}x'(\mu) + Dy'(\mu) = X(\mu)^{-1/2}Y(\mu)^{-1/2}e = \frac{1}{\sqrt{\mu}}e,$$

wobei wir $x_i(\mu)y_i(\mu) = \mu$ im letzten Schritt genutzt haben.

zu c): Es gilt folgt unmittelbar

$$\|D^{-1}x'(\mu) + Dy'(\mu)\|_2^2 = \|\frac{1}{\sqrt{\mu}}e\|_2^2 = \frac{1}{\mu}\|e\|_2^2 = \frac{n}{\mu}$$

Andererseits haben wir

$$\begin{aligned} \|D^{-1}x'(\mu) + Dy'(\mu)\|_2^2 &= (D^{-1}x'(\mu) + Dy'(\mu))^T(D^{-1}x'(\mu) + Dy'(\mu)) \\ &= \|D^{-1}x'(\mu)\|_2^2 + \|Dy'(\mu)\|_2^2 + 2(D^{-1}x'(\mu))^T(Dy'(\mu)) \\ &= \|D^{-1}x'(\mu)\|_2^2 + \|Dy'(\mu)\|_2^2 + 2x'(\mu)^Ty'(\mu). \end{aligned}$$

Weiter gilt $x'(\mu)^Ty'(\mu) = 0$, denn die zweite Zeile liefert $Ax'(\mu) = 0$ und somit liefert $x'(\mu)^T \cdot$ 1. Zeile

$$0 = -x'(\mu)^TAu'(\mu) - x'(\mu)^Ty'(\mu) = 0 - x'(\mu)^Ty'(\mu).$$

Damit:

$$\|D^{-1}x'(\mu) + Dy'(\mu)\|_2^2 = \|D^{-1}x'(\mu)\|_2^2 + \|Dy'(\mu)\|_2^2 = \frac{n}{\mu}.$$

zu d): Offensichtlich gilt

$$\frac{y_i(\mu)}{x_i(\mu)} x_i'(\mu)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i(\mu)}{x_i(\mu)} x_i'(\mu)^2 = \|D^{-1}x'(\mu)\|_2^2 \leq \frac{n}{\mu}$$

und somit

$$x_i'(\mu)^2 \leq \frac{x_i(\mu)}{y_i(\mu)} \frac{n}{\mu} = \frac{x_i(\mu)^2}{x_i(\mu) y_i(\mu)} \frac{n}{\mu} = \frac{x_i(\mu)^2}{\mu^2} n.$$

Wegen $x_i(\mu) \leq C_1 \mu$ für $i \in N$ haben wir

$$x_i'(\mu)^2 \leq \frac{C_1^2 \mu^2}{\mu^2} n = C_1^2 n.$$

Für $i \in B$ wissen wir lediglich $x_i(\mu) \leq C$ und erhalten

$$x_i'(\mu)^2 \leq \frac{C^2}{\mu^2} n.$$

Die Abschätzungen für $y_i'(\mu)$ verlaufen völlig analog mit Verwendung des Terms $\|Dy'(\mu)\|_2^2$.

zu e): Sei nun $|N| = n - m$ und $(A^T, (e_i)_{i \in N}$ nichtsingulr. es gilt

$$Ax'(\mu) = A_B x_B'(\mu) + A_N x_N'(\mu) = 0$$

mit Aufspaltung in Teilmatrizen bzw. -vektoren für die Indexmengen B, N. Umsortieren der Zeilen von $(A^T, (e_i)_{i \in N}$ liefert die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} A_B & 0 \\ A_N & I \end{smallmatrix}\right)$ und somit ist der Block A_B invertierbar. Dies ergibt

$$x_B'(\mu) = -A_B^{-1} A_N x_N'(\mu)$$

und somit wegen $|x_i'(\mu)| \leq C_1 \sqrt{n}$, $i \in N$,

$$\|x_B'(\mu)\| \leq \|A_B^{-1} A_N\| \|x_N'(\mu)\| \leq \|A_B^{-1} A_N\| \sqrt{n} C_1 \sqrt{n}.$$

zu f): Es gilt für alle $0 < \mu < \nu$

$$\|x(\nu) - x(\mu)\| = \left\| \int_\mu^\nu x'(\mu)\, dx \right\| \leq \int_\mu^\nu \|x'(\mu)\|\, dx \leq |\nu - \mu| \kappa C_1 n.$$

Damit läst sich $x(\mu)$ stetig in $\mu = 0$ fortsetzen.

G11.

Es gilt

$$\min c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} \left(\ln(x_i) + \nu \left(\ln(x_i y_i/\mu) + 1 - x_i y_i/\mu\right)\right) = \varphi(x;\mu) + \mu\nu \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i y_i/\mu)$$

mit der klassischen log-Barrierefunktion $\varphi(x;\mu) = c^T x - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$ und $\phi(t) = t - 1 - \ln t$. das Problem ist also von der Form

$$\min \varphi(x;\mu) + \mu\nu \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i y_i/\mu) \quad \text{u.d. NB } \; Ax = b, \;\; x, y > 0.$$

Der erste Summand nimmt bekanntlich unabhängig von y auf dem zulässigen Bereich in $x(\mu)$ sein Minimum an. das Minimum von $\phi(t) = t - 1 - \ln t$ wird in $t = 1$ angenommen, also für $x_i y_i = \mu$. Zusammenfassend werden im Punkt $(x(\mu), y)$ mit $y = X(\mu)^{-1} e = y(\mu)$ beide Summanden minimal.