Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Sommersemester 2006

Blatt 3

Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung: Lösungsvorschlag

G6.

zu a):

$$\min \varphi(x;\mu) := c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \quad \text{u.d. NB} \quad Ax = b, \;\; x > 0. \qquad (\text{BP}_\mu)$$

$\nabla \varphi(x;\mu) = c - \mu X^{-1} e$, $X^{-1} = \text{diag}(x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1})$.

Die Optimalittasbedingungen lauten

$$c - \mu X(\mu)^{-1} e + A^T u = 0, \quad Ax = b, \quad x > 0.$$

zu b): Der Punkt $(u(\mu), y(\mu)) := (-u, \mu X(\mu)^{-1} e)$ ist zulässig für (DP), da $\mu X(\mu)^{-1} e - A^T u = c$, $\mu X(\mu)^{-1} e > 0$.

zu c): Nach dem schwachen Dualitätssatz ist

$$c^T x(\mu) - f^* \leq c^T x(\mu) - b^T u(\mu) = x(\mu)^T y(\mu) = \mu x(\mu)^T X(\mu)^{-1} e = \mu e^T e = \mu n.$$

G7.

zu a): Es gilt wie in **G6**

$$\begin{aligned} \varphi(x;\mu) &= c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i), \\ \nabla \varphi(x;\mu) &= c - \mu X^{-1} e, \\ \nabla^2 \varphi(x;\mu) &= \mu X^{-2}. \end{aligned}$$

Also lautet das Newton-System

$$\begin{pmatrix} \mu X^{-2} & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c + \mu X^{-1} e \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e = (1, \ldots, 1)^T. \qquad (2)$$

zu b): $\|X^{-1} \Delta x\| \leq \theta$ liefert $|\Delta x_i / x_i| \leq \theta$, also $|\Delta x_i| \leq \theta x_i$ und somit $x_i + \Delta x_i \geq (1 - \theta) x_i > 0$.

Die zweite Zeile von (2) ergibt $A \Delta x_+ = 0$ also $A x_+ = A x = b$.

zu c): Multiplikation der ersten Zeile von (2) mit Δx^T liefert

$$\mu \|X^{-1} \Delta x\|^2 = \Delta x^T (\mu X^{-2}) \Delta x = -\Delta x^T A^T u + \Delta x^T (-c + \mu X^{-1} e) = -\Delta x^T (c - \mu X^{-1} e).$$

Hierbei haben wir genutzt, dass wegen der zweiten Zeile von (2) gilt $A \Delta x = 0$.

Der Newton-Schritt Δx_+ in x_+ erfüllt analog

$$\mu\|X_+^{-1}\Delta x_+\|^2 = -\Delta x_+^T(c - \mu X_+^{-1}e).$$

zu d): Die erste Zeile von (2) liefert $-c = \mu X^{-2}\Delta x + A^T u - \mu X^{-1}e$. Einsetzen in die letzte Gleichung von c) ergibt

$$\mu\|X_+^{-1}\Delta x_+\|^2 = \Delta x_+^T(\mu X^{-2}\Delta x + A^T u - \mu X^{-1}e + \mu X_+^{-1}e) = \Delta x_+^T(\mu X^{-2}\Delta x - \mu(X^{-1} - X_+^{-1})e),$$

wobei wir $A\Delta x_+ = 0$ genutzt haben. Nun gilt wegen $X_+ = X + \Delta X$

$$(X^{-1} - X_+^{-1})e = X_+^{-1}X^{-1}(X_+ - X)e = X_+^{-1}X^{-1}\Delta X e = X_+^{-1}X^{-1}\Delta x.$$

Andererseits gilt

$$X^{-2}\Delta x = X_+^{-1}X^{-1}X_+X^{-1}\Delta x = X_+^{-1}X^{-1}(I + \Delta X X^{-1})\Delta x.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mu\|X_+^{-1}\Delta x_+\|^2 = &= \Delta x_+^T(\mu X^{-2}\Delta x - \mu(X^{-1} - X_+^{-1})e) = \mu\Delta x_+^T X_+^{-1}X^{-1}\Delta X X^{-1}\Delta x \\ &\leq \mu\|X_+^{-1}\Delta x_+\|\|X^{-2}\Delta X\Delta x\|.\end{aligned}$$

zu e): Es gilt

$$\|X^{-2}\Delta X\Delta x\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i^4}{x_i^4} \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i^2}{x_i^2}\right)^2 = \|X^{-1}\Delta x\|^4.$$

Nun liefert d)

$$\|X_+^{-1}\Delta x_+\| \leq \|X^{-2}\Delta X\Delta x\| \leq \|X^{-1}\Delta x\|^2 \leq \theta^2.$$

zu f): Die erste Zeile von (2) ergibt

$$-A^T u - \mu X^{-2}\Delta x + \mu X^{-1}e = c,$$

also ist $(-u, y)$ mit $y = -\mu X^{-2}\Delta x + \mu X^{-1}e = \mu X^{-1}(-X^{-1}\Delta x + e)$ dual zulässig, da $y > 0$ nach (2).

Wir erhalten

$$\begin{aligned}c^T x - f^* \leq c^T x - b^T u = x^T y &= \mu x^T X^{-1}(-X^{-1}\Delta x + e) = \mu e^T(-X^{-1}\Delta x + e) \\ &= \mu(n - e^T X^{-1}\Delta x) \leq \mu(n + \|e\|\|X^{-1}\Delta x\|) \leq \mu(n + \sqrt{n}\theta).\end{aligned}$$

zu iv): $\Delta x_+(\tilde{\mu})$ hängt stetig von $\tilde{\mu}$ ab. Wegen $\|X_+^{-1}\Delta x_+(\mu)\| \leq \theta^2 < \theta$ kann man also $\tilde{\mu} < \mu$ finden, so dass immer noch $\|X_+^{-1}\Delta x_+(\tilde{\mu})\| \leq \theta$ gilt.