Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Sommersemester 2006

Blatt 1

Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung: Lösungsvorschlag

G1. Strikt zulässige Punkte

zu a): $S^\circ \subset \mathring{S}$:

Da $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist S° offensichtlich offen. Zudem gilt $S^\circ \subset S$, also insgesamt $S^\circ \subset \mathring{S}$.

$S^\circ \supset \mathring{S}$: Wir zeigen zunächst $cl(S^\circ) = S$.

Sei $x \in S \setminus S^\circ$ beliebig. Dann gilt $h(x) \leq 0$ und $h_j(x) = 0$ für mindestens ein j. Nach Voraussetzung existiert $\tilde{x} \in S^\circ$, also mit $h(\tilde{x}) < 0$. Da alle h_i konvex sind, gilt für $x(t) := (1-t)x + t\tilde{x}$

$$h_i(x(t)) \leq (1-t)h_i(x) + th_i(\tilde{x}) \leq th_i(\tilde{x}) < 0 \quad \forall\, t \in]0,1], \;\; i = 1, \ldots, l$$

und damit $x(t) \in S^\circ$ für alle $t \in]0,1]$. Wegen $x = \lim_{t \searrow 0} x(t)$ ist also $x \in cl(S^\circ)$. Da $x \in S \setminus S^\circ$ beliebig war, folgt $S \subset cl(S^\circ)$, also $S = cl(S^\circ)$ wegen der Abgeschlossenheit von S.

Aus $cl(S^\circ) = S$ folgt nun $\mathring{S} \subset S^\circ$: Sei $x \in \mathring{S}$ beliebig, dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \mathring{S}$ und wir finden $y \in B_\varepsilon(x) \cap S^\circ$, da $\mathring{S} \subset S = cl(S^\circ)$. Der an x gespiegelte Punkt $y' = y - 2(x-y)$ liegt ebenfalls in $B_\varepsilon(x) \subset \mathring{S}$, also $h(y') \leq 0$. Nun liefert $h(y) < 0$ wegen der Konvexität von h

$$h(x) = h((y+y')/2) \leq \frac{1}{2}h(y) + \frac{1}{2}h(y') < 0,$$

also $x \in S^\circ$. Da $x \in \mathring{S}$ beliebig war, ist $\mathring{S} \subset S^\circ$ gezeigt.

zu b): Setze z.B. $l = 1$, $h(x) = h_1(x) = \min(x, 0)$. Dann ist $S = \mathbb{R}$, $\mathring{S} = \mathbb{R}$, aber $S^\circ =]-\infty, 0[$.

G2. Logarithmische Barriere-Funktion

Sei $(x_k) \subset S^\circ = \mathring{S}$ beliebig mit $x_k \to x \in \partial S$. Da (x_k) beschränkt ist, sind offensichtlich die Folgen $-\ln(-h_i(x_k))$ nach unten beschränkt. Wegen $x \in \partial S$ gilt $h_j(x) = 0$ für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, l\}$ und somit $-\ln(-h_j(x_k)) \to \infty$ für $k \to \infty$. Dies liefert $p(x_k) = -\sum_{i=1}^{l} \ln(-h_i(x_k)) \to \infty$ wie gewünscht.

G3. Konvexe QPs als Second Order Cone Problem

Setze $q(x) := \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx + \gamma$. Mit $\bar{x} = -Q^{-1}c$ gilt $\nabla q(\bar{x}) = Q\bar{x} + c = 0$ und daher liefert Taylorentwicklung in $\bar{x}$

$$q(x) := \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx + \gamma = q(\bar{x}) + \nabla q(\bar{x})^T(x-\bar{x}) + \frac{1}{2}(x-\bar{x})^TQ(x-\bar{x}) = q(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x-\bar{x})^TQ(x-\bar{x}).$$

Nun existiert $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $Q = R^T R$. Also gilt

$$(x - \bar{x})^T Q(x - \bar{x}) = (x - \bar{x})^T R^T R(x - \bar{x}) = \|R(x - \bar{x})\|^2.$$

Dies ergibt $q(x) = q(\bar{x}) + \frac{1}{2}\|R(x - \bar{x})\|^2$ und somit

$$q(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|R(x - \bar{x})\|^2 \leq -2q(\bar{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \|R(x - \bar{x})\| \leq \sqrt{-2q(\bar{x})}.$$

Die rechte Ungleichung ist eine Second Order Cone Nebenbedingung mit $C = R$, $a = -R\bar{x}$, $d = 0$, $e = \sqrt{-2q(\bar{x})}$.