Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Sommersemester 2006

Blattt 6

# Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung

## G13. Beispiele für selbstkonkordante Barrierefunktionen

Verwenden Sie das Selbstkonkordanz-Kriterium

- $(x_k) \subset S^\circ, \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x \in \partial S \implies p(x_k) \to \infty,$
- Für alle $x \in S^\circ$ und alle $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, mit $\psi_{x,v}(t) := p(x+tv)$ gilt

$$|\psi'''_{x,v}(0)| \leq 2\psi''_{x,v}(0)^{3/2} > 0$$

um die Selbstkonkordanz der folgenden Funktionen nachzuweisen.

a) Die log-Barrierefunktion $p : x \in S^\circ \mapsto -\sum_{i=1}^n \ln(x_i)$ für $S^\circ = \mathbb{R}^n_{++}$. Bestimmen Sie zudem die Komplexitätszahl

$$\vartheta_p := \sup_{x\in S^\circ} \|H(x)^{-1}g(x)\|^2_{H(x)} < \infty,$$

**Tip:** Benutzen Sie die Ungleichung $\left(\sum_{i=1}^n y_i^3\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^3$.

b) Die Funktion $p : X \in S^\circ \mapsto -\ln(\det(X))$ mit

$$S^\circ = \{X \in \mathbb{R}^{n,n} \ : \ X = X^T, \ X \text{ positiv definit}\}.$$

Sie dürfen folgendes benutzen: Zu $X \in S^\circ$ gibt es $X^{1/2} \in S^\circ$ mit $X = X^{1/2}X^{1/2}$. Gehen Sie wie folgt vor:

i) Zeigen Sie, dass für jedes symmetrische $V \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt

$$p(X+tV) = -2\ln(\det(X^{1/2})) - \ln(\det(I + tX^{-1/2}VX^{-1/2})).$$

ii) Bezeichnen $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $X^{-1/2}VX^{-1/2}$, dann gilt

$$\psi_{X,V}(t) = p(X+tV) = \text{const} - \sum_{i=1}^n \ln(1+t\lambda_i).$$

iii) Benutzen Sie nun den Tip aus a).

## G14. Unzulässige Innere-Punkte-Verfahren für LP

Unzulässige Innere-Punkte-Verfahren für LP können in einem Punkt $(x_0, u_0, y_0)$ starten, für den nur $(x_0, y_0) > 0$ aber *nicht* $(x_0, u_0, y_0) \in Z^\circ$ gilt. Sie halten die Iterierten in der Umgebung

$$\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma,\beta) := \Big\{(x,u,y) \in \mathbb{R}^{n+m+n} \ : \ (x,y) > 0, \ x_i y_i \geq \gamma\frac{x^Ty}{n} = \gamma\mu(x,y), \ i = 1,\ldots,n,$$
$$\|(Ax-b, c-A^Tu-y)\|_2 \leq \frac{\|(Ax_0-b, c-A^Tu_0-y_0)\|_2\beta\mu(x,y)}{\mu(x_0,y_0)}\Big\}$$

mit $0 < \gamma < 1 < \beta$. Anwendung des Newton-Verfahrens auf das gestörte Kuhn-Tucker-System $F_{\sigma\mu}(x,u,y) = 0$ ergibt anstelle (PD)

$$\text{(PDI)} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ Y & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c - A^T u - y \\ Ax - b \\ Xy - \sigma\mu e \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $(x,u,y) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma,\beta)$ gilt:

a) $|\Delta x^T \Delta y| \leq \|r_D\|\|\Delta x\| + \|r_P\|\|\Delta u\|$ mit $r_P = Ax - b, r_D = c - A^T u - y$.

b) Mit einer nur von $(x_0,u_0,y_0)$ abhängigen Konstanten $C_0 > 0$ gilt für das neue Dualitätsmaß

$$\mu_+(\alpha) := \frac{x_+(\alpha)^T y_+(\alpha)}{n}, \quad x_+(\alpha) = x + \alpha\Delta x, \quad y_+(\alpha) = y + \alpha\Delta y$$

die Abschätzung

$$\mu_+(\alpha) \leq \big(1 - \alpha(1-\sigma) + \alpha^2 \frac{C_0}{n}(\|\Delta x\| + \|\Delta u\|)\big)\mu.$$

Bis auf einen quadratischen Term verhält sich das Dualitätsmaß also wie bei zulässigen Innere-Punkte-Verfahren.