Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Sommersemester 2006

Blatt 5

Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung

G10. Tangente des zentralen Pfads

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem

$$\min c^T x \text{ unter der Nebenbed. } Ax = b, \;\; x \geq 0 \tag{LP}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $Z^\circ \neq \emptyset$ und A habe vollen Zeilenrang. Nach G9. gibt es eine strikt komplementäre Lösung $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$ und mit der Partition $B = \{i : \bar{x}_i > 0\}$, $N = \{i : \bar{y}_i > 0\}$ existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit

$$\begin{aligned} 0 < x_i(\mu) \leq C_1\mu, \quad y_i(\mu) \geq 1/C_1 \quad \forall\, i \in N, \\ 0 < y_i(\mu) \leq C_2\mu, \quad x_i(\mu) \geq 1/C_2 \quad \forall\, i \in B. \end{aligned}$$

Ferner existiert für bel. $\mu_0 > 0$ nach Lemma 2.3.1 und 2.3.3 eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|x(\mu)\|_2 + \|y(\mu)\|_2 \leq C \quad \forall\, \mu \in (0, \mu_0].$$

a) Zeigen Sie, dass $(x'(\mu), u'(\mu), y'(\mu)) := \frac{d}{d\mu}(x(\mu), u(\mu), y(\mu))$ die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & -A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ Y(\mu) & 0 & X(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(\mu) \\ u'(\mu) \\ y'(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}.$$

erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass mit $D = X(\mu)^{1/2} Y(\mu)^{-1/2}$ gilt

$$D^{-1} x'(\mu) + D y'(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} e.$$

c) Folgern Sie

$$\|D^{-1} x'(\mu)\|_2^2 + \|D y'(\mu)\|_2^2 \leq \frac{n}{\mu}.$$

d) Zeigen Sie unter Verwendung von c), dass gilt

$$\begin{aligned} |x_i'(\mu)| \leq C_1\sqrt{n}, \quad |y_i'(\mu)| \leq \frac{C}{\mu}\sqrt{n}, \quad i \in N, \\ |y_i'(\mu)| \leq C_2\sqrt{n}, \quad |x_i'(\mu)| \leq \frac{C}{\mu}\sqrt{n}, \quad i \in B. \end{aligned}$$

Wir setzen ab jetzt voraus, dass (LP) eine optimale nichtentartete Ecke $\bar{x}$ hat, in der strikte Komplementarität gelte. Dann gilt also $|N| = n - m$, $(A^T, (e_i)_{i \in N})$ nichtsingulär, $\bar{x} + \bar{y} > 0$.

Zeigen Sie, dass dann gilt:

e) Es gibt eine Konstante $\kappa > 0$ mit

$$|x_i'(\mu)| \leq \kappa C_1 n, \quad 1 \leq i \leq n.$$

f) Folgern Sie, dass $\lim_{\mu \searrow 0} x(\mu)$ existiert.

Bemerkung: Man kann e) auch zeigen, wenn keine optimale, strikt komplementäre, nichtentartete Ecke $\bar{x}$ existiert, dies ist aber aufwendiger.

G11. Grundkonzept einer Bewertungsfunktion für nichtkonvexe Probleme

Wir betrachten das Problem (LP) aus **G10**. Es sei $Z^\circ \neq \emptyset$ und A habe vollen Zeilenrang. Bezeichne $\mu \in \mathbb{R}_{++} \to (x(\mu), u(\mu), y(\mu)) \in Z^\circ$ den zugehörigen primal-dualen zentralen Pfad.

Zeigen Sie: Für jedes $\nu > 0$ ist $(x(\mu), y(\mu))$ die eindeutige Lösung Problems

$$\min c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i) + \nu (\ln(x_i y_i/\mu) + 1 - x_i y_i/\mu)) \text{ u. d. NB } Ax = b, \quad x, y > 0.$$

Bemerkung: Diese Beobachtung kann als Basis zur Globalisierung für nichtkonvexe Probleme genutzt werden.

Hausaufgaben:

H7. Verfeinerung von G10 [10 Punkte]

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem (LP) aus **G10** und machen dieselben Voraussetzungen wie in **G10**.

Setze $D = X(\mu)^{1/2} Y(\mu)^{-1/2}$, $D_B := \text{diag}((x_i(\mu)^{1/2} y_i(\mu)^{-1/2})_{i \in B})$, $A_B = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, j \in B}$ und $A_N = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, j \in N}$.

Zeigen Sie: $w = (x_i'(\mu))_{i \in B} =: x_B'(\mu)$ ist Lösung von

$$\min \frac{1}{2} \|D_B^{-1} w\| \quad \text{u.d. NB} \quad A_B w = -A_N x_N'(\mu), \tag{1}$$

wobei $x_N'(\mu) := (x_i'(\mu))_{i \in N}$. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

a) Schreiben Sie die Optimalitätsbedingungen für (1) auf.

b) Folgern Sie aus G10, a), dass gilt

$$D^{-2} x' - A^T u' = \frac{y}{\mu}.$$

und hieraus

$$D_B^{-2} x_B' - A_B^T u' = \frac{y_B(\mu)}{\mu}.$$

c) Nutzen Sie die Optimalitätsbedingungen von (LP) für die strikt komplementäre Lösung $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda})$ und die duale Zulässigkeit von $(x(\mu), u(\mu), y(\mu))$, um $y_B(\mu) = A_B^T v$ mit geeignetem v nachzuweisen.

d) Folgern Sie nun die Optimalität von $x_B'(\mu)$ für (1).

Bemerkung: Hieraus kann man G10, e) ohne Zusatzvoraussetzungen herleiten, das erfordert aber Zusatzarbeit.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 12.7.2006 in der Übung.