Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Sommersemester 2006

Blatt 4

Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung

G8. Das primal-duale Newtonsystem

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem

$$\min c^T x \text{ unter der Nebenbed. } Ax = b, \;\; x \geq 0 \tag{LP}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $Z^\circ \neq \emptyset$ und A habe vollen Zeilenrang. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass dann der zugehörige primal-duale zentrale Pfad $\mu \in \mathbb{R}_{++} \to (x(\mu), u(\mu), z(\mu)) \in Z^\circ$ wohldefiniert ist als Lösung von

$$F_\mu(x,u,y) := \begin{pmatrix} c - A^T u - y \\ Ax - b \\ Xy - \mu e \end{pmatrix} = 0, \quad x, y > 0. \tag{1}$$

a) Stellen Sie in $(x,u,y) \in Z^\circ$ die Newton-Gleichung

$$F'_\mu(x,u,y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta y \end{pmatrix} = -F_\mu(x,u,y).$$

für (1) auf.

b) Zeigen Sie, dass $F'_\mu(x,u,y)$ für beliebiges $(x,u,y) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n_{++}$ invertierbar ist.

c) Begründen Sie, dass die Newton-Gleichung sich reduzieren läßt auf ein Gleichungssystem der Form

$$ADA^T \Delta u = r$$

mit einer Diagonalmatrix D. Geben Sie D und r an. Wie erhält man nun Δx und Δy?

G9. Konvergenz des zentralen Pfads gegen strikt komplementäre Lösungen

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem (LP) aus **G8**. Es sei $Z^\circ \neq \emptyset$ und A habe vollen Zeilenrang. Nach Vorlesung gilt dann $\Omega = \Omega_P \times \Omega_D \neq \emptyset$, (LP) und (DP) haben also optimale Lösungen.

Der Satz von Goldman-Tucker besagt, dass Ω eine *strikt komplementäre Lösung* enthält, es existiert also $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}) \in \Omega$ mit $\bar{x} + \bar{y} > 0$.
Sei also $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}) \in \Omega$ mit $\bar{x} + \bar{y} > 0$ und setze $B = \{i : \bar{x}_i > 0\}$, $N = \{i : \bar{y}_i > 0\}$. Zeigen Sie für den primal-dualen zentrale Pfad $\mu \in \mathbb{R}_{++} \mapsto (x(\mu), u(\mu), y(\mu))$:

a) Es gilt $(x(\mu) - \bar{x})^T (y(\mu) - \bar{y}) = 0$.

b) Folgern Sie $x(\mu)^T \bar{y} + y(\mu)^T \bar{x} = n\mu$.

c) Leiten Sie daraus her, dass Konstanten $C_1, C_2 > 0$ existieren mit

$$0 < x_i(\mu) \leq C_1\mu, \quad y_i(\mu) \geq 1/C_1 \quad \forall\, i \in N,$$
$$0 < y_i(\mu) \leq C_2\mu, \quad x_i(\mu) \geq 1/C_2 \quad \forall\, i \in B.$$

d) Zeigen Sie mit Resultaten aus der Vorlesung, dass für jede Nullfolge $\mu_k \searrow 0$ die Folge $(x(\mu_k), u(\mu_k), y(\mu_k))$ einen Häufungspunkt (x^*, u^*, y^*) hat. Weisen Sie nach, dass (x^*, u^*, y^*) eine strikt komplementäre Lösung von (LP), (DP) ist.

Hausaufgaben:

H6. Primal-duale Barriere-Funktion [10 Punkte]

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem (LP) aus **G8**. Es sei $Z^\circ \neq \emptyset$ und A habe vollen Zeilenrang. Bezeichne $\mu \in \mathbb{R}_{++} \to (x(\mu), u(\mu), z(\mu)) \in Z^\circ$ den zugehörigen primal-dualen zentralen Pfad.

Zeigen Sie: $(x(\mu), u(\mu), z(\mu))$ ist die eindeutige Lösung des primal-dualen Barriereproblems

$$\min x^T y - \mu \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i y_i) \text{ unter der Nebenbed. } Ax = b, \quad A^T u + y = c, \quad x, y > 0. \quad (\text{PD}_\mu)$$

Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

a) Stellen Sie die Optimalitätsbedingungen für (PD_μ) auf.

b) Leiten Sie hieraus ab, dass für die Lösung von (PD_μ) gilt

$$(x - \mu Y^{-1}e)^T (y - \mu X^{-1}e).$$

c) Folgern Sie, dass mit einer geeigneten positiv definiten Matrix M gilt

$$\|Xy - \mu e\|_M^2 = 0.$$

Warum stimmt also die Lösung von (PD_μ) mit $(x(\mu), u(\mu), z(\mu))$ überein?

Abgabe der Hausaufgaben: Am 28.6.2006 in der Übung.