Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Sommersemester 2006

Blatt 3

Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung

G6. Zentraler Pfad und Dualitätslücke

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem

$$\min c^T x \text{ unter der Nebenbed. } Ax = b, \;\; x \geq 0 \tag{LP}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Stellen Sie das log-Barriereproblem (BP_μ) zu (LP) auf und geben Sie die Bestimmungsgleichung für den zentralen Pfad $\mu \mapsto x(\mu)$ an (Optimalitätsbedingungen für (BP_μ)).

b) Lesen Sie aus der Gleichung für den zentralen Pfad einen Punkt $(u(\mu), y(\mu))$ ab, der für das Dualproblem (DP) von (LP) zulässig ist.

c) Zeigen Sie mit Hilfe von b), dass für den Optimalwert f^* von (LP) gilt

$$c^T x(\mu) - f^* \leq n\mu.$$

G7. Das Newton-Verfahren für log-Barriereprobleme bei LP

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem (LP) aus **G6**. Bezeichne $x(\mu)$ die Lösung des zugehörigen log-Barriereproblems (BP_μ).

Notation: Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ sei $X := \text{diag}(x_1, \ldots, x_n)$.

Wir untersuchen das Newton-Verfahren für (BP_μ). Ziel der Aufgabe ist der Beweis der folgenden Aussage:

Sei $\theta \in]0, 1[$. Weiter sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $Ax = b$, $x > 0$, so dass der Newton-Schritt Δx für (BP_μ) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \mu X^{-2} & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c + \mu X^{-1} e \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e = (1, \ldots, 1)^T, \tag{1}$$

kurz genug im folgenden Sinne ist:

$$\|X^{-1}\Delta x\| \leq \theta. \tag{2}$$

Sei nun $x_+ = x + \Delta x$ und Δx_+ der nächste Newton-Schritt in x_+. Dann gilt:

i) $Ax_+ = b, \;\; x_+ > 0.$

ii) $\|X_+^{-1}\Delta x_+\| \leq \|X^{-1}\Delta x\|^2 \leq \theta^2.$

iii) Bezeichnet f^* den Optimalwert von (LP), dann gilt

$$(2) \quad \Longrightarrow \quad c^T x - f^* \leq (n + \sqrt{n}\theta)\, \mu.$$

iv) Es gibt $\tilde{\mu} < \mu$, so dass der Newton-Schritt $\Delta\tilde{x}_+$ für (BP$_{\tilde{\mu}}$) in x_+ erfüllt $\|X_+^{-1}\Delta\tilde{x}_+\| \leq \theta$.

Bemerkung: iv) zeigt, dass nach einem Newton-Schritt im neuen Punkt x_+ wiederum (2) für ein *verkleinertes* $\tilde{\mu} = \beta\mu < \mu$ gilt. Man kann zeigen, dass hierbei $\beta = 1 - \frac{\theta(1-\theta)}{\sqrt{n+\theta}}$ gewählt werden kann. Aus iii) kann man ablesen, dass die Optimalitätslücke mit μ gegen 0 geht.

Gehen Sie in folgenden Schritten vor: x erfülle $Ax = b$, $x > 0$ und (2).

a) Zeigen Sie, dass die Newton-Gleichung für das Barriereproblem (BP$_\mu$) tatsächlich durch (1) gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass aus (1), (2) i) folgt.

c) Folgern Sie aus der Newton-Gleichung (1), dass gilt

$$\mu\|X^{-1}\Delta x\|^2 = -\Delta x^T(c - \mu X^{-1}e).$$

Analog gilt für den nächsten Newton-Schritt Δx_+ in x_+

$$\mu\|X_+^{-1}\Delta x_+\|^2 = -\Delta x_+^T(c - \mu X_+^{-1}e).$$

d) Nutzen Sie die Newton-Gleichung für Δx, um hieraus die Identität

$$\mu\|X_+^{-1}\Delta x_+\|^2 = \Delta x_+^T(\mu X^{-2}\Delta x + A^T u - \mu(X^{-1} - X_+^{-1})e)$$

und schließlich nacheinander

$$\begin{aligned}\mu\|X_+^{-1}\Delta x_+\|^2 &= \mu\Delta x_+^T X_+^{-1}X^{-1}(X_+X^{-1}\Delta x - \Delta x)\\ &= \mu\Delta x_+^T X_+^{-1}X^{-1}(\Delta X X^{-1}\Delta x)\\ &\leq \mu\|X_+^{-1}\Delta x_+\|\|X^{-2}\Delta X\Delta x\|\end{aligned}$$

abzuleiten.

e) Weisen Sie nach, dass gilt

$$\|X^{-2}\Delta X\Delta x\| \leq \|X^{-1}\Delta x\|^2$$

und folgern Sie daraus ii).

f) Zeigen Sie, dass $(-u, -\mu X^{-2}\Delta x + \mu X^{-1}e)$ zulässig für das duale Problem von (LP) ist und folgern Sie iii).

g) Begründen Sie schließlich iv).

Hausaufgaben:

H5. Newton-Verfahren für Barriere-Probleme [10 Punkte]

Wir betrachten das einfache lineare Optimierungsproblem

$$\min c^T x \text{ unter der Nebenbed. } x \geq 0 \qquad \text{(LPs)}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $c \geq 0$. Bezeichne $x(\mu)$ die Lösung des zugehörigen log-Barriereproblems (BP_μ).

Notationen: Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ sei $X := \text{diag}(x_1, \ldots, x_n)$. Für eine symmetrische, positiv definite Matrix $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei

$$\|x\|_M := \sqrt{x^T M x}$$

mit zugehöriger Matrixnorm $\|C\|_M = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Cx\|_M}{\|x\|_M}$.

a) Stellen Sie die Newton-Gleichung $F'_\mu(x)\Delta x = -F_\mu(x)$ zur Lösung des Barriereproblems (BP_μ) auf.

b) Zeigen Sie, dass gilt (beachten Sie, dass $\|v\|_{X(\mu)^{-2}} = \|X(\mu)^{-1}v\|$)

$$\|x - x(\mu)\|_{X(\mu)^{-2}} \leq \theta \quad \Longrightarrow \quad \frac{x_i}{x(\mu)_i} \in [1-\theta, 1+\theta]$$
$$\Longrightarrow \quad \|I - F'_\mu(x)^{-1} F'_\mu(x(\mu) + \tau(x - x(\mu)))\|_{X(\mu)^{-2}} \leq \theta(2+\theta) \quad \forall \tau \in [0,1].$$

Hinweis: Es gilt $\|C\|_{X(\mu)^{-2}} = \|X(\mu)^{-1} C X(\mu)\|$.

c) Folgern Sie mit Sätzen aus der Vorlesung, dass für jedes $0 < \theta < \sqrt{2} - 1$ gilt: Für jedes x_0 mit $\|x_0 - x(\mu)\|_{X(\mu)^{-2}} \leq \theta$ erzeugt die Newton-Iteration

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, \quad F'_\mu(x_k)\Delta x_k = -F_\mu(x_k)$$

eine Folge (x_k) mit

$$\|x_{k+1} - x(\mu)\|_{X(\mu)^{-2}} \leq \theta(2+\theta)\|x_k - x(\mu)\|_{X(\mu)^{-2}}$$

und konvergiert somit gegen $x(\mu)$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass mit geeignetem $0 < \beta < 1$ nahe genug an 1 gilt

$$\|x_0 - x(\mu)\|_{X(\mu)^{-2}} \leq \theta \quad \Longrightarrow \quad \|x_1 - x(\beta\mu)\|_{X(\beta\mu)^{-2}} \leq \theta.$$

Man kann also iterativ nach einem Newton-Schritt μ auf $\beta\mu$ verkleinern, für $\beta\mu$ den nächsten Newton-Schritt durchführen usw.

Anstelle der nicht prüfbaren Bedingung $\|x - x(\mu)\|_{X(\mu)^{-2}} \leq \theta$ kann man auch $\|\Delta x\|_{X^{-2}} \leq \theta$ verwenden, die Analysis wird dann etwas aufwendiger (siehe **G7**).

Abgabe der Hausaufgaben: Am 7.6.2006 in der Übung.