Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Sommersemester 2006
Blatt 2

Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung

G4. Zentraler Pfad

Wir betrachten das konvexe quadratische Optimierungsproblem

$$\min \frac{x_1^2}{2} + x_2 \text{ unter der Nebenbed. } x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \tag{QP}$$

a) Stellen Sie das Barriereproblem (BP_μ) zu (QP) bei Verwendung der log-Barrierefunktion auf. Berechnen Sie Gradient und Hessematrix der Zielfunktion von (BP_μ).

b) Bestimmen Sie die Lösung $x(\mu)$ von (BP_μ) und skizzieren Sie den zentralen Pfad.

c) Zeigen Sie, dass $\bar{x} = \lim_{\mu \searrow 0} x(\mu)$ existiert und dass $\bar{x}$ Lösung von (QP) ist.

d) Wie ändert sich der zentrale Pfad, wenn die Nebenbedingung $x_2 \geq 0$ in (QP) m-mal auftritt?

G5. Optimalitätsbedingungen für Probleme mit linearen Gleichungsnebenbedingungen

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und zudem konvex auf $D \cap L$ mit $L = \{x \,:\, Ax = b\}$. Betrachte das Problem

$$\min \; f(x) \;\; \text{unter der Nebenbedingung } \; Ax = b, \;\; x \in D. \tag{P}$$

Zeigen Sie:

a) Sind die Spalten von $B \in \mathbb{R}^{n,k}$ eine Basis von $\text{Ker}(A)$ und gilt $A\tilde{x} = b$, dann ist (P) äquivalent zu

$$\min \; f(\tilde{x} + Bz) \;\; \text{unter der Nebenbedingung } \; \tilde{x} + Bz \in D. \tag{PR}$$

b) $\bar{x}$ ist genau dann Lösung von (P), wenn mit einem $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ die Kuhn-Tucker-Bedingungen gelten

$$\begin{aligned} &\nabla f(\bar{x}) + A^T \bar{u} = 0 \quad \text{für ein } \bar{u} \in \mathbb{R}^m, \\ &A\bar{x} = b, \quad \bar{x} \in D. \end{aligned}$$

c) Wenden Sie b) auf das Barriereproblem (BP_μ) an.

Bitte wenden!

Hausaufgaben:

H3. Algorithmus LOGB für lineare Programme [6 Punkte]

Betrachte für $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ das lineare Programm

$$\min\ c^T x \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad Ax = b,\ \ x \geq 0. \tag{LP}$$

a) Stellen Sie das Barriereproblem (BP_μ) zu (LP) bei Verwendung der log-Barrierefunktion auf. Berechnen Sie Gradient und Hessematrix der Zielfunktion von (BP_μ).

b) Zeigen Sie, dass (BP_μ) höchstens eine Lösung $x(\mu)$ hat.

c) Geben Sie mit Hilfe von G5 notwendige Optimalitätsbedingungen für (BP_μ) an.

H4. Analytisches Zentrum der Optimalmenge [6 Punkte]

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem

$$\min x_2 \ \text{ unter der Nebenbed. } \ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_1 \leq 2 + 2x_2. \tag{LPH4}$$

a) Skizzieren Sie den zulässigen Bereich Z von (LPH4) und bestimmen Sie die Lösungsmenge Z_{opt} von (LPH4).

b) Stellen Sie das Barriereproblem (BP_μ) zu (LPH4) bei Verwendung der log-Barrierefunktion auf und bestimmen Sie die Lösung $x(\mu)$ von (BP_μ).

c) Skizzieren Sie den zentralen Pfad.

d) Gegen welchen Punkt $\bar{x} = \lim_{\mu \searrow 0} x(\mu)$ konvergiert der zentrale Pfad für $\mu \searrow 0$?

Abgabe der Hausaufgaben: Am 24.5.2006 in der Übung.