Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Sommersemester 2006

Blatt 1

Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung

G1. Strikt zulässige Punkte

Gegeben seien stetige Funktionen $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, l$. Setze $h = (h_1, \ldots, h_l)^T$ und betrachte die Menge

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, h(x) \leq 0\},$$

sowie das *strikte Innere* S° von S

$$S^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, h(x) < 0\}$$

und den *offenen Kern* $\mathring{S} = S \setminus \partial S$ von S.

a) Zeigen Sie: Sind $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $1 \leq i \leq l$, und ist S° nichtleer, dann gilt $S^\circ = \mathring{S}$.

b) Geben Sie stetige $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq l$, an, für die gilt $S^\circ \neq \emptyset$, aber $S^\circ \neq \mathring{S}$.

G2. Logarithmische Barriere-Funktion

Seien $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, l$, stetig und

$$S := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, h(x) = (h_1(x), \ldots, h_l(x))^T \leq 0\right\},$$

so dass mit $S^\circ, \mathring{S}$ aus **G2** gilt $\mathring{S} = S^\circ \neq \emptyset$.

Zeigen Sie, dass die **logarithmische Barrierefunktion**

$$p : \mathring{S} \to \mathbb{R}, \quad p(x) := -\sum_{i=1}^{l} \ln(-h_i(x))$$

die folgende *Barriere-Eigenschaften* hat:

$$(x_k) \subset \mathring{S}, \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x \in \partial S \implies p(x_k) \to \infty \quad \text{für } k \to \infty.$$

G3. Konvexe quadratische Nebenbedingung als Second-Order-Cone-Nebenbedingung

Es sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch positiv definit, $c \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie die streng konvexe quadratische Nebenbedingung

$$\frac{1}{2}x^T Q x + c^T x + \gamma \leq 0$$

als Second-Order-Cone-Nebenbedingung, also in der Form

$$\|Cx + a\| \leq d^T x + e$$

mit geeigneten $C \in \mathbb{R}^{m,n}$, $a \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^n$, $e \in \mathbb{R}$.
Tip: Es gibt $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $Q = R^T R$ (z.B. durch Cholesky-Faktorisierung).

Bitte wenden!

Hausaufgaben:

H1. Eigenschaften konvexer Optimierungsprobleme [6 Punkte]

Seien $f, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und betrachte

$$\min\ f(x)\ \text{ unter d. Nebenbed. }\ x \in \mathbb{R}^n,\ h(x) = (h_1(x), \ldots, h_l(x))^T \leq 0,\ Ax = b\ \text{(COP)}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $0 \leq m < n$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt für (COP):

a) Der zulässige Bereich Z ist konvex und abgeschlossen.

b) Jedes lokale Minimum von (COP) ist globale Lösung von (COP). Die Menge Z_{opt} der optimalen Lösungen von (COP) ist konvex und abgeschlossen.

c) Ist f streng konvex, so besitzt (COP) keine oder genau eine Lösung.

H2. Log-Barriere-Funktion für die Menge positiv semidefiniter Matrizen [4 Punkte]

Sei

$$S := \left\{ X \in \mathbb{R}^{n,n} \ :\ X = X^T,\ \ X \text{ positiv semidefinit} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass die **Barrierefunktion**

$$p : \mathring{S} \to \mathbb{R}, \quad p(X) := -\ln(\det(X))$$

die *Barriere-Eigenschaften* hat

$$(X_k) \subset \mathring{S}, \quad \lim_{k\to\infty} X_k = X \in \partial S \implies p(X_k) \to \infty.$$

Tip: $\mathring{S} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n,n} \ :\ X = X^T,\ \ X \text{ positiv definit} \right\}$.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 10.5.2006 in der Übung.